Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a IX-a

Subiectul 1.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x}{x-1}<2$.

b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2=3\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]+[x]\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]=5\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Subiectul 2.

Dacă $x, y, z\in[0,+\infty)$ și $x+y+z=3$, aflați minimul și maximul expresiei

$$E=\sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(z+3)}+\sqrt{z(x+3)}.$$

Subiectul 3.

Fie patrulaterul convex *ABCD* și punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor *ABC*, respectiv *ABD*. Demonstrați că dacă CDH_2H_1 este paralelogram, atunci *ABCD* este patrulater inscriptibil. Reciproca este adevărată ?

Subiectul 4.

Medianele duse din vârfurile *A*, *B*, *C* ale triunghiului *ABC* intersectează cercul circumscris acestuia în punctele *D*, *E*, respectiv *F*. Dacă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$, arătați că triunghiul *ABC* este echilateral.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

Subiectul 1.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x}{x-1}<2$.

b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2=3\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]+[x]\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]=5\cdot\left[\frac{x}{x-1}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluție:

a) $\frac{x}{x-1}<2\Leftrightarrow\frac{x}{x-1}-2<0\Leftrightarrow\frac{2-x}{x-1}<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. **1p**

b) Dacă $\left[\frac{x}{x-1}\right]=0$, obținem imediat $x=0$, care este soluție. **1p**

Dacă $\left[\frac{x}{x-1}\right]\neq 0$, atunci împărțind a doua egalitate cu $\left[\frac{x}{x-1}\right]$, rezultă $[x]=2$ și deci $x\in[2,3)$. **1p**

Prin înlocuire, observăm că $x=2$ nu este soluție. Așadar $x\in(2,3)$. **1p**

Deoarece $0<x-1<x$ și ținând seama de rezultatul de la punctul a), deducem că $\frac{x}{x-1}\in(1,2)$. Aceasta conduce la $\left[\frac{x}{x-1}\right]=1$ și imediat la $x=\sqrt{5}$. **2p**

Așadar $S=\{0,\sqrt{5}\}$. **1p**

Subiectul 2.

Dacă $x,y,z\in[0,+\infty)$ și $x+y+z=3$, aflați minimul și maximul expresiei

$$E=\sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(z+3)}+\sqrt{z(x+3)}.$$

Soluție:

<u>*Metoda 1*</u> a) $E^2=\left(\sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(z+3)}+\sqrt{z(x+3)}\right)^2\geq$

$\geq\sqrt{x(y+3)}^2+\sqrt{y(z+3)}^2+\sqrt{z(x+3)}^2=3(x+y+z)+xy+yz+zx\geq 9$ **2p**

Rezultă $E\geq 3$, minimul expresiei este 3 . . .. **1p** cu egalitate, de exemplu, pentru $x=y=0,\ z=3$. **0,5p**

$$E^2=\left(\sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(z+3)}+\sqrt{z(x+3)}\right)^2=\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y+3}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{z+3}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{x+3}\right)^2\overset{C-B-S}{\le}$$

$\le(x+y+z)(y+3+z+3+x+3)=3\cdot 12=36$..**2p**

Rezultă $E\le 6$. Maximul expresiei este 6. .... **1p**

Egalitatea are loc pentru $x=y=z=1$. **0,5p**

<u>Metoda 2</u> $\sqrt{x(y+3)}=\sqrt{x(x+2y+z)}\ge\sqrt{x\cdot x}=x$. Analog $\sqrt{y(z+3)}\ge y$ și $\sqrt{z(x+3)}\ge z$. Atunci $E\ge x+y+z=3$.

$$2E=\sqrt{4x(y+3)}+\sqrt{4y(z+3)}+\sqrt{4z(x+3)}\le\frac{4x+y+3}{2}+\frac{4y+z+3}{2}+\frac{4z+x+3}{2}=12.$$

Rezultă $E\le 6$.

Subiectul 3 .

Fie patrulaterul convex *ABCD* și punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor *ABC*, respectiv *ABD*. Demonstrați că dacă CDH_2H_1 este paralelogram, atunci *ABCD* este patrulater inscriptibil. Reciproca este adevărată ?

Soluție: Considerăm O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *ABC*, respectiv *ABD*. Conform teoremei lui Sylvester au loc relațiile $\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}=\overrightarrow{O_1H_1}$ și $\overrightarrow{O_2A}+\overrightarrow{O_2B}+\overrightarrow{O_2D}=\overrightarrow{O_2H_2}$ **2p**

CDH_2H_1 paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{H_1H_2}\Leftrightarrow \overrightarrow{CO_1}+\cancel{\overrightarrow{O_1O_2}}+\overrightarrow{O_2D}=\overrightarrow{H_1O_1}+\cancel{\overrightarrow{O_1O_2}}+\overrightarrow{O_2H_2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_2D}=-\overrightarrow{O_1H_1}+\overrightarrow{O_2H_2}\Leftrightarrow \cancel{-\overrightarrow{O_1C}}+\cancel{\overrightarrow{O_2D}}=-\overrightarrow{O_1A}-\overrightarrow{O_1B}\cancel{-\overrightarrow{O_1C}}+\overrightarrow{O_2A}+\overrightarrow{O_2B}+\cancel{\overrightarrow{O_2D}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{0}=-\overrightarrow{O_1A}-\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_2A}+\overrightarrow{O_2B}\Leftrightarrow\vec{0}=2\cdot\overrightarrow{O_2O_1}\Leftrightarrow$ *ABCD* inscriptibil. **4p**

Reciproca este falsă deoarece dacă *ABCD* este inscriptibil cu $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=90^0$, atunci $H_1=C$ și $H_2=D$. **1p**

Subiectul 4 .

Medianele duse din vârfurile *A*, *B*, *C* ale triunghiului *ABC* intersectează cercul circumscris acestuia în punctele *D*, *E*, respectiv *F*. Dacă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$, arătați că triunghiul *ABC* este echilateral.

Soluție:

Fie *M*, *N*, *P* mijloacele laturilor *BC*, *CA*, respectiv *AB*. Triunghiurile *AMB* și *CMD* sunt asemenea, rezultând $\frac{AM}{CM}=\frac{BM}{DM}$ și de aici, cu notațiile consacrate, $AM\cdot DM=\frac{a^2}{4}$.

.... **1p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

În continuare $AM\cdot(AD-AM)=\dfrac{a^2}{4}$ sau, altfel $AD=\dfrac{a^2+4\cdot AM^2}{4\cdot AM}$.

De aici obținem $AD=\dfrac{a^2+4\cdot AM^2}{4\cdot AM^2}\cdot AM$, care se poate scrie vectorial $\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2+4\cdot AM^2}{4\cdot AM^2}\cdot\overrightarrow{AM}$ sau $\overrightarrow{AD}=\left(1+\dfrac{a^2}{4\cdot AM^2}\right)\cdot\overrightarrow{AM}$.

Analog $\overrightarrow{BE}=\left(1+\dfrac{b^2}{4\cdot BN^2}\right)\cdot\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CF}=\left(1+\dfrac{c^2}{4\cdot CP^2}\right)\cdot\overrightarrow{CP}$. **1p**

Deoarece $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(-2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ și $\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$ rezultă că $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a^2}{4\cdot AM^2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b^2}{4\cdot BN^2}\right)\cdot\left(-2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ și $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{c^2}{4\cdot CP^2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. **1p**

Deoarece $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$, rezultă
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{4\cdot AM^2}-\dfrac{2b^2}{4\cdot BN^2}+\dfrac{c^2}{4\cdot CP^2}\right)\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{4\cdot AM^2}-\dfrac{2b^2}{4\cdot BN^2}+\dfrac{c^2}{4\cdot CP^2}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ și de aici $\begin{cases}\dfrac{a^2}{AM^2}-\dfrac{2b^2}{BN^2}+\dfrac{c^2}{CP^2}=0\\ \dfrac{a^2}{AM^2}-\dfrac{2b^2}{BN^2}+\dfrac{c^2}{CP^2}=0\end{cases}$. Rezultă imediat $\dfrac{a^2}{AM^2}=\dfrac{b^2}{BN^2}=\dfrac{c^2}{CP^2}$ (*). **2p**

<u>*Metoda 1*</u> Conform teoremei medianei $AM^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, rezultând apoi că $\dfrac{a^2}{AM^2}=\dfrac{4a^2}{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$ și analoagele.

(*) devine $\dfrac{4a^2}{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}=\dfrac{4b^2}{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}=\dfrac{4c^2}{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$.

Împărțind cu 4 și aplicând proprietatea șirurilor de rapoarte egale, obținem

$$\frac{a^2}{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}=\frac{b^2}{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}=\frac{c^2}{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}=\frac{1}{3}$$

De aici deducem ușor că $a^2=b^2=c^2$ și apoi că triunghiul *ABC* este echilateral. **2p**

<u>*Metoda 2*</u> (*) este echivalentă cu $\frac{a}{AM}=\frac{b}{BN}=\frac{c}{CP}$. Să considerăm ultima egalitate. Evident avem și $\frac{b/2}{BN}=\frac{c/2}{CP}$, adică $\frac{AN}{BN}=\frac{AP}{CP}$. Deoarece $\sphericalangle ABN$ și $\sphericalangle ACP$ nu pot fi suplementare, rezultă că triunghiurile *ANB* și *APC* sunt asemenea și de aici $\sphericalangle ABN=\sphericalangle ACP$. Trapezul *BCNP* este așadar inscriptibil și deci isoscel. Din $BP=CN$ rezultă că triunghiul *ABC* este isoscel cu baza *BC*. Din prima egalitate se deduce că triunghiul *ABC* este isoscel și cu baza *AB*.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro